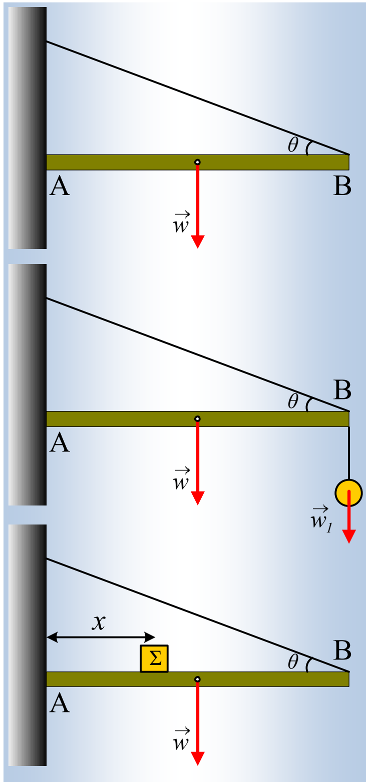
Η τριβή εξασφαλίζει την ισορροπία;

Η ομογενής ράβδος ΑΒ του σχήματος, βάρους $\vec{w}$, ισορροπεί σε οριζόντια θέση, δεμένη στο άκρο της Β με νήμα, το οποίο σχηματίζει γωνία θ με τη ράβδο όπου εφθ=0,5, ενώ το άλλο της άκρο Α, στηρίζεται σε μη λείο κατακόρυφο τοίχο.



i) Να υπολογιστεί ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και τοίχου, για την παραπάνω ισορροπία.

Δίνεται ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και τοίχου μ_s=0,5.

ii) Αν στο άκρο Β κρεμάσουμε μέσω νήματος, μια σφαίρα βάρους $\vec{w}_1$ τότε:

α) Η ασκούμενη τριβή θα αυξηθεί.

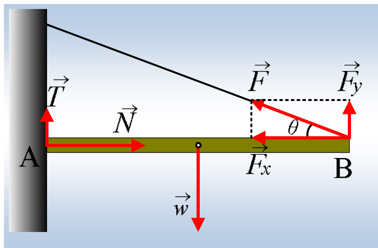
β) Το σύστημα θα συνεχίσει να ισορροπεί.

γ) Η ράβδος θα γλιστρήσει στο άκρο της Α.

iii) Ποια η ελάχιστη απόσταση x, από το άκρο Α της ράβδου, στην οποία μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα σώμα Σ βάρους $\vec{w}_1$, χωρίς να ολισθήσει η ράβδος.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο, όπου $\vec{F}$, η τάση του νήματος, ενώ $\vec{N}$ και $\vec{T}$ η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης από τον τοίχο. Από την συνθήκη ισορροπίας της ράβδου παίρνουμε:



$$\Sigma\vec{F} \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow N = F\cdot \sigma\upsilon\nu\theta & (1) \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow T + F\cdot \eta\mu\theta = w & (2) \end{cases}$$

$$\Sigma\tau_B = 0 \rightarrow w\cdot\frac{L}{2} - T\cdot L = 0 \rightarrow T = \frac{w}{2} \quad (3)$$

Για να μην έχουμε ολίσθηση της ράβδου, θα πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική, οπότε:

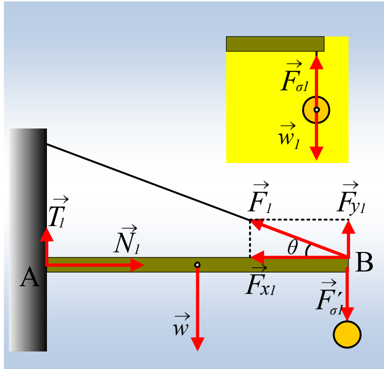
$$T \le T_{o\rho} \rightarrow \frac{w}{2} \le \mu_s N \quad (4) \rightarrow$$

Όμως από (1) και (2) παίρνουμε $N = F\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{w-\frac{w}{2}}{\eta\mu\theta}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\frac{w}{2}}{\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}} = w$ και με αντικατάσταση στην (4) παίρνουμε:

$$\frac{w}{2} \leq \mu_s w \rightarrow \mu_s \geq 0{,}5$$

Συνεπώς η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής που εξασφαλίζει την ισορροπία της ράβδου είναι $\mu_{s,min}=0{,}5$.

ii) Ας ξεκινήσουμε από την ισορροπία της σφαίρας, όπου:



$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow F_{\sigma 1} = w_1$$

Αλλά τότε στην ράβδο, εκτός των προηγουμένων δυνάμεων ασκείται μέσω του κατακορύφου νήματος δύναμη με φορά προς τα κάτω μέτρου:

$$F'_{\sigma 1} = F_{\sigma 1} = w_1.$$

Παίρνουμε ξανά από την συνθήκη ισορροπίας της ράβδου:

$$\Sigma\vec{F} \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow N_1 = F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta & (1\alpha) \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow T_1 + F_1 \cdot \eta\mu\theta = w + F'_{\sigma 1} & (2\alpha) \end{cases}$$

$$\Sigma\tau_B = 0 \rightarrow w \cdot \frac{L}{2} - T_1 \cdot L = 0 \rightarrow T_1 = \frac{w}{2} \qquad (3\alpha)$$

Από την σχέση (2 α) παίρνουμε:

$$\frac{w}{2} + F_1 \cdot \eta\mu\theta = w + w_1 \rightarrow F_1 = \frac{w + 2w_1}{2\eta\mu\theta}$$

Αλλά τότε η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, η οποία θα μπορούσε να εμφανιστεί, έχει μέτρο:

$$T_{o\rho,1} = \mu_s N_1 = \mu_s F_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \mu_s \tfrac{w+2w_1}{2\eta\mu\theta} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$T_{o\rho,1} = \mu_s \tfrac{w+2w_1}{2\varepsilon\varphi\theta} = 0{,}5 \tfrac{w+2w_1}{2\cdot 0{,}5} = \tfrac{w}{2} + w_1$$

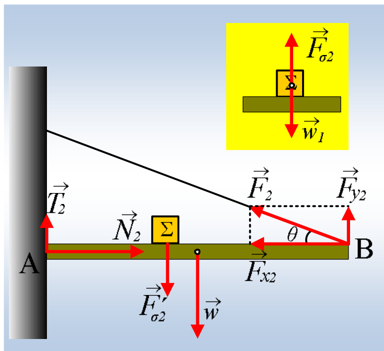
Παρατηρούμε ότι η οριακή τριβή, είναι τώρα μεγαλύτερη από την τριβή που θα εμφανιστεί ($T_{o\rho,1} > T_1$), συνεπώς η εμφανιζόμενη τριβή είναι στατική και η ράβδος ισορροπεί. Με βάση αυτά:

α) Η ασκούμενη τριβή θα αυξηθεί. (Λ) Η τριβή δεν αλλάζει.

β) Το σύστημα θα συνεχίσει να ισορροπεί. (Σ)

γ) Η ράβδος θα γλιστρήσει στο άκρο της Α. (Λ)

iii) Με βάση το διπλανό σχήμα, από την ισορροπία του σώματος Σ παίρνουμε:



$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow F_{\sigma 2} = w_1$$

Αλλά τότε στην ράβδο, ασκείται και η αντίδραση της $F_{\sigma 2}$ με φορά προς τα κάτω μέτρου:

$$F'_{\sigma 2} = F_{\sigma 2} = w_1.$$

Παίρνουμε ξανά από την συνθήκη ισορροπίας της ράβδου:

$$\Sigma\vec{F} \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \rightarrow N_2 = F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta & (1\beta) \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow T_2 + F_2 \cdot \eta\mu\theta = w + F'_{\sigma 2} & (2\beta) \end{cases}$$

$$\Sigma\tau_B = 0 \rightarrow w \cdot \frac{L}{2} + w_1 \cdot (L - x) - T_2 \cdot L = 0 \rightarrow$$

$$T_2 = \frac{w}{2} + w_1 \cdot \frac{(L-x)}{L} \qquad (3\beta)$$

Από την σχέση (2β) παίρνουμε:

$$\frac{w}{2} + w_1 \cdot \frac{(L-x)}{L} + F_2 \cdot \eta\mu\theta = w + w_1 \rightarrow F_2 = \frac{\frac{w}{2} + \frac{x}{L}w_1}{\eta\mu\theta}$$

Έτσι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, η οποία θα μπορούσε να εμφανιστεί, έχει μέτρο:

$$T_{o\rho,2} = \mu_s N_2 = \mu_s F_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \mu_s \frac{\frac{w}{2} + \frac{x}{L}w_1}{\eta\mu\theta} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \rightarrow$$

$$T_{o\rho,2} = \mu_s \frac{\frac{w}{2} + \frac{x}{L}w_1}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{w}{2} + \frac{x}{L}w_1$$

Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική, οπότε $T_2 \leq T_{o\rho,2}$ ή

$$\frac{w}{2} + w_1 \cdot \frac{(L-x)}{L} \leq \frac{w}{2} + \frac{x}{L}w_1 \rightarrow$$

$$x \geq \frac{L}{2}$$

Κατά συνέπεια η ελάχιστη απόσταση που θα μπορούσε να τοποθετηθεί ένα σώμα βάρους w_1 και το σύστημα να ισορροπεί, είναι ίση με ½ L.

Σχόλια-Συμπεράσματα:

i) Το αν μπορεί να ισορροπεί ή όχι μια ράβδος που δένεται με νήμα, όπως στο πρώτο σχήμα, καθορίζεται από τον συντελεστή οριακής τριβής και τη γωνία του νήματος με τη ράβδο. Αν $\mu_s \geq \varepsilon\varphi\theta$, τότε η ράβδος ισορροπεί.

ii) Είτε κρεμάσουμε ένα σώμα με νήμα από τη ράβδο, είτε τοποθετήσουμε πάνω της ένα σώμα, το αποτέλεσμα είναι η ράβδος να δεχτεί κατακόρυφη δύναμη ίση με το βάρος του σώματος. **ΔΕΝ** δέχεται όμως η ράβδος, το βάρος του σώματος, δύναμη που ασκείται στο σώμα και όχι στη ράβδο.

iii) Αν στη ράβδο που αρχικά ισορροπεί, με άσκηση οριακής στατικής τριβής, ασκηθεί με κάποιο τρόπο μια ακόμη κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα κάτω, η ράβδος συνεχίζει να ισορροπεί, αρκεί η δύναμη να ασκηθεί σε σημείο, στο μέσον της ή σε σημείο δεξιότερα του μέσου της, μέχρι το άκρο της Β.

dmargaris@gmail.com